• कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 11 हैं।
• प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें।
• कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं।
• कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
• इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है। प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वां� में 10.15 बजे किया जाएगा। 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ने और इस अवधि के दौरान उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखें।
• Please check that this question paper contains 11 printed pages.
• Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
• Please check that this question paper contains 29 questions.
• Please write down the Serial Number of the question before attempting it.
• 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.
सामान्य निदेशः

(i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं: अ, ब तथा स। खण्ड अ में 10 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है। खण्ड ब में 12 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है। खण्ड स में 7 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है।

(iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं।

(iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं। फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में अन्तर्निर्दिष्ट विकल्प है। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है।

(v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है। यदि आवश्यक हो तो आप लघुगणकीय सारणियों माँग सकते हैं।

General Instructions:

(i) All questions are compulsory.

(ii) The question paper consists of 29 questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of 10 questions of one mark each, Section B comprises of 12 questions of four marks each and Section C comprises of 7 questions of six marks each.

(iii) All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.

(iv) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.

(v) Use of calculators is not permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.
Question numbers 1 to 10 carry 1 mark each.

1. Let R be the equivalence relation in the set $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ given by $R = \{(a, b) : \text{2 divides } (a - b)\}$. Write the equivalence class $[0]$.

2. Write the projection of the vector $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ on the vector $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$.

3. Write a $2 \times 2$ matrix which is both symmetric and skew-symmetric.

4. Write the distance of a point $P(a, b, c)$ from x-axis.

5. Write a vector in the direction of the vector $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ that has magnitude 9 units.
6. Write the principal value of \( \cos^{-1}[\cos(680^\circ)] \).

7. If \[
\begin{bmatrix}
x & y & 4 \\
z + 6 & x + y & 0 \\
0 & 6 & 0
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
8 & w \\
0 & 6 & 0
\end{bmatrix},
\]
to \((x + y + z)\) write the value of \((x + y + z)\).

8. \[
\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx
\]
Find:

9. Write the derivative of \( \sin x \) w.r.t. \( \cos x \).

10. Write the value of the determinant \[
\begin{vmatrix}
p & p + 1 \\
p - 1 & p
\end{vmatrix}.
\]
SECTION B

Question numbers 11 to 22 carry 4 marks each.

11. मान लीजिए कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय S (1 को छोड़कर) में निम्नलिखित प्रकार से * परिभाषित है : 

\[ a * b = a + b - ab, \text{ सभी } a, b \in S \text{ के लिए} \]

सिद्ध कीजिए कि

(i) * S पर एक द्विआधारी संख्रिया है ]
(ii) संख्रिया * क्रमविनिमेय व साधारण है ]

Let S be the set of all rational numbers except 1 and * be defined on S by 

\[ a * b = a + b - ab, \text{ for all } a, b \in S. \]

Prove that 

(i) * is a binary operation on S.
(ii) * is commutative as well as associative.

12. दर्शाइए कि :

\[ \cot^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}} \right) = \frac{x}{2}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \]

अथवा

x के लिए हल कीजिए :

\[ 2 \tan^{-1} (\cos x) = \tan^{-1} (2 \cosec x) \]

Show that :

\[ \cot^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}} \right) = \frac{x}{2}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \]

OR

Solve for x :

\[ 2 \tan^{-1} (\cos x) = \tan^{-1} (2 \cosec x) \]
13. Using properties of determinants, prove the following:
\[
\begin{vmatrix}
  a & a^2 & bc \\
  b & b^2 & ca \\
  c & c^2 & ab
\end{vmatrix} = (a - b) (b - c) (c - a) (bc + ca + ab)
\]

14. If \( x = a(\cos t + t \sin t) \) and \( y = a(\sin t - t \cos t) \), then find the value of \( \frac{d^2y}{dx^2} \) at \( t = \frac{\pi}{4} \).

15. If \( (x - y) \cdot e^{x-y} = a \), prove that \( y \frac{dy}{dx} + x = 2y \).

16. The sum of the perimeters of a circle and a square is \( k \), where \( k \) is some constant. Prove that the sum of their areas is least when the side of the square is double the radius of the circle.

OR

Using differentials, find the approximate value of \( (3.968)^{3/2} \).
17. Evaluate:
\[ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx \]

OR

Find:
\[ \int (x + 3) \sqrt{3x - 4x - x^2} \, dx \]

18. If \( y(x) \) is a solution of the differential equation
\[ \left( \frac{2 + \sin x}{1 + y} \right) \frac{dy}{dx} = -\cos x \]
and \( y(0) = 1 \), then find the value of \( y\left(\frac{\pi}{2}\right) \).

19. Find the general solution of the differential equation (\( x - y \)) \( \frac{dy}{dx} = x + 2y \).
20. The equation \( \frac{x + 2}{2} = \frac{2y - 7}{6} = \frac{5 - z}{6} \) represents a line. If points A(1, 2, 3) and B(-1, 3, 4) are on the line, find the direction cosines of the line. Also, find the vector equation of the line through the point A(-1, 2, 3) and parallel to the given line.

21. If \( \vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k} \), \( \vec{b} = -\hat{i} + \hat{k} \), \( \vec{c} = 2\hat{j} - \hat{k} \) are three vectors, find the area of the parallelogram having diagonals \( \vec{a} + \vec{b} \) and \( \vec{b} + \vec{c} \).

OR

If the three vectors \( \vec{a} \), \( \vec{b} \) and \( \vec{c} \) are coplanar, prove that the vectors \( \vec{a} + \vec{b} \), \( \vec{b} + \vec{c} \) and \( \vec{c} + \vec{a} \) are also coplanar.

22. A bag contains 3 red and 7 black balls. Two balls are selected at random one-by-one without replacement. If the second selected ball happens to be red, what is the probability that the first selected ball is also red?
SECTION C

Question numbers 23 to 29 carry 6 marks each.

23. Find the equation of the tangent line to the curve \( y = x^2 - 2x + 7 \) which is (i) parallel to the line \( 2x - y + 9 = 0 \), (ii) perpendicular to the line \( 5y - 15x = 13 \).

24. Using integration, find the area of the region bounded by the curves:

\[ y = |x + 1| + 1, \quad x = -3, \quad x = 3, \quad y = 0 \]

25. Find:

\[ \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} \, dx \]

OR

Evaluate:

\[ \int_0^\pi \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx \]
26. बिन्दु \((1, 2, -4)\) से होकर गुजरने वाले उस समतल के सदिश व कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो निम्न रेखाओं के समांतर है

\[
\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \text{ तथा }
\]

\[
\vec{r} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k} + \mu(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})
\]

इस प्रकार प्राप्त समतल से बिन्दु \((9, -8, -10)\) की दूरी भी ज्ञात कीजिए।

Find the vector and cartesian forms of the equation of the plane passing through the point \((1, 2, -4)\) and parallel to the lines

\[
\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \text{ and }
\]

\[
\vec{r} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k} + \mu(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})
\]

Also, find the distance of the point \((9, -8, -10)\) from the plane thus obtained.

27. एक सिक्के को उछालने के प्रयोग पर विचार कीजिए। यदि सिक्के पर चित प्रकट हो तो सिक्के को पुनः उछालें, परंतु यदि सिक्के पर पट प्रकट हो, तो एक पास को फेंकें। यदि घटना ‘कम-से-कम एक पट प्रकट होना’ का घटित होना दिया गया है, तो घटना ‘पासे पर 4 से बड़ी संख्या प्रकट होना’ की सम्भावना ज्ञात कीजिए।

अथवा

एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 5 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पास को उछालता है और कहता है कि ‘1’ आया है। वास्तव में ‘1’ के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Consider the experiment of tossing a coin. If the coin shows head, toss it again, but if it shows tail, then throw a die. Find the conditional probability of the event that ‘the die shows a number greater than 4’ given that ‘there is at least one tail’.

OR

A man is known to speak the truth 3 out of 5 times. He throws a die and reports that it is ‘1’. Find the probability that it is actually 1.
28. कुल ₹ 7,000 की धनराशि, तीन अलग-अलग बचत बैंक खातों में, जिनमें वार्षिक ब्याज दरें क्रमशः 5%, 8% तथा 8\(\frac{1}{2}\)% है, जमा की जाती हैं। तीनों खातों से कुल मिलाकर ₹ 550 का वार्षिक ब्याज प्राप्त होता है। पहले दो खातों में, जिनकी ब्याज दरें 5% तथा 8% हैं, समान राशि जमा की जाती है। आवश्यक विधि की सहायता से ज्ञात कीजिए कि इन तीनों खातों में कितनी-कितनी राशि जमा की गई है।

A total amount of ₹ 7,000 is deposited in three different savings bank accounts with annual interest rates of 5%, 8% and \(8\frac{1}{2}\)% respectively. The total annual interest from these three accounts is ₹ 550. Equal amounts have been deposited in the 5% and 8% savings accounts. Find the amount deposited in each of the three accounts, with the help of matrices.

29. एक गृहणी दो प्रकार के भोज्यों X तथा Y को इस प्रकार मिलाना चाहती है कि मिश्रण में कम से-कम विटामिन A का घटक 10 मात्रक, विटामिन B का घटक 12 मात्रक व विटामिन C का घटक 8 मात्रक हो। दोनों भोज्यों की एक किग्रा मात्रा में विटामिन की मात्रा निम्न प्रकार से हैं:

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th>विटामिन A</th>
<th>विटामिन B</th>
<th>विटामिन C</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>भोज्य X</td>
<td>1</td>
<td>2</td>
<td>3</td>
</tr>
<tr>
<td>भोज्य Y</td>
<td>2</td>
<td>2</td>
<td>1</td>
</tr>
</tbody>
</table>

एक किग्रा भोज्य X का मूल्य ₹ 6, तथा भोज्य Y का मूल्य ₹ 10 है। वैचित्र आहार के लिए मिश्रण का न्यूनतम मूल्य ज्ञात कीजिए। उपर्युक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए। इस समस्या को आप किस मूल्य की प्राप्ति से जोड़ना चाहेंगे?

A housewife wishes to mix together two kinds of food, X and Y, in such a way that the mixture contains at least 10 units of vitamin A, 12 units of vitamin B and 8 units of vitamin C. The vitamin contents of one kg of food is given below:

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th>Vitamin A</th>
<th>Vitamin B</th>
<th>Vitamin C</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Food X</td>
<td>1</td>
<td>2</td>
<td>3</td>
</tr>
<tr>
<td>Food Y</td>
<td>2</td>
<td>2</td>
<td>1</td>
</tr>
</tbody>
</table>

One kg of food X costs ₹ 6 and one kg of food Y costs ₹ 10. Formulate the above problem as a linear programming problem and find the least cost of the mixture which will produce the diet graphically. What value will you like to attach with this problem?